ทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลสมมาตรและการแปลงดิสฟอร์มอล
Symmetric Teleparallel Gravity and Disformal Transformation

ศักดิ์สิทธิ์ จักรศรี

Saksith Jaksri

สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะสาธารณสุขศาสตร์ มหาวิทยาลัยกรุงเทพธนบุรี, โทร. 02-408-1067

Department of Physics, Faculty of Pubic Health, Bangkokthonburi University, Tel. 02-408-1067

e-mail : Saksith.jak@bkkthon.ac.th

บทคัดย่อ

เราได้ทำการศึกษาทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลสมาตร (Symmetric Teleparallel Gravity) ซึ่งอธิบายแรงโน้มถ่วงด้วยตัวแปรนอนเมตริก (nonmetricity) เราได้ทำการศึกษาเทคนิคที่ใช้ในการคำนวณในฟอร์มูเลชันนี้แล้วนำมาใช้แปลงแอกชันของทฤษฎีนี้โดยการแปลงเมตริกแบบดิสฟอร์มอลเพื่อหา ทฤษฎีสเกลาร์-เทนเซอร์ ที่เป็นไปได้จากการแปลงนี้

คำสำคัญ: ความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลสมาตร, ตัวแปรนอนเมตริก, การแปลงแบบดิสฟอร์มอล

Abstract

We consider ‘Symmetric Teleparallel Gravity’ which describes gravity as the effects of nonmetricity. We have investigated calculation techniques in this formulation. We have transformed the action of this theory by the disformal transformation of the metric using these techniques. The resulting Scalar-Tensor action is discussed.

Keywords: Symmetric Teleparallel Gravity, nonmetricity, disformal transformation

บทนำ

ทฤษฎีมาตรฐานที่ใช้สำหรับอธิบายความโน้มถ่วงในปัจจุบันคือทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอน์สไตน์ (Einstein’s General Relativity, GR) [CW. Misner, et al. (2516)] ทฤษฎีนี้ผ่านการทดสอบมาแล้วอย่างมากมาย แต่ก็ยังมีปัญหาบางอย่างในการอธิบายปรากฏการณ์ในระดับจักรวาล[C.M. Will (2557)] ซึ่งทำให้นักฟิสิกส์สนใจในทฤษฎีแรงโน้มถ่วงที่ปรับปรุงจากทฤษฎีของไอน์สไตน์ (Modified Gravity)[T. Clifton, et al. (2555)] การปรับปรุงอาจทำได้โดยการเพิ่ม ฟังก์ชันสเกลาร์ ลงไปในทฤษฎี ผลที่ได้คือทฤษฎีสเกลาร์-เทนเซอร์ (Scalar-Tensor Theories) หรือโดยปรับปรุงรูปแบบของ แอกชันของไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต (Einstein-Hilbert Action) ผลลัพธ์ที่ได้คือทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบ f(R) (หรือ f(R)-gravity) เราจะศึกษาการปรับปรุงทฤษฎีความโน้มถ่วงของไอน์สไตน์ด้วยวิธีที่ต่างออกไป โดยการใช้

เงื่อนไขทางเราขาคณิตที่แตกต่าง ภายใต้เงื่อนไขนี้ปริมาณทางเรขาคณิตที่ใช้ในการอธิบายแรงโน้มถ่วงเปลี่ยนไปจากความโค้งของกาลอวกาศเป็น ตัวแปรนอนเมตริก (nonmetricity)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปถูกสร้างขึ้นมาเพื่ออธิบายความโน้มถ่วงด้วยความโค้ง (curvature) ของกาลอวกาศ (spacetime) โดยตั้งสมมติฐานให้ ทอร์ชัน (Torsion) และ นอนเมตริก (non-metricity) ของกาลอวกาศเท่ากับศูนย์ ในปัจจุบันมีทฤษฎีที่ใช้เรขาคณิตของกาลอวกาศที่ต่างออกไปต่สามารถให้พลวัตของความโน้มถ่วงเท่าเทียมกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป คือ ทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลล (Teleparallel gravity)[R. Aldrovandi, et al. (2556)] ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี ทฤษฎีนี้ใช้ ทอร์ชัน ในการอธิบายความโน้มถ่วง และ ตั้งสมมติฐานให้ ความโค้ง และ นอนเมตริก ของกาลอวกาศเท่ากับศูนย์ ต่อมาได้มีการ ใน พ.ศ.2542มีการเสนอทฤษฎี ที่ตั้งสมมติฐานให้ ความโค้ง และ ทอร์ชัน ของกาลอวกาศเท่ากับศูนย์ และใช้เทนเซอร์นอนเมติก ในการอธิบายความโน้มถ่วง [J.M. Nester, H-J Yo. (2542), I. Mol. (2560), M. Adak. (2549)] โดยใช้ชื่อว่าทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปแบบพารัลเลลสมมาตร (Symmetric teleparallel general relativity) หรือต่อมาถูกเรียกว่า ทฤษฎีสมมาตรเทเลพารัลเลลซึ่งสมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (Symmetric teleparallel equivalent of general relativity, STEGR)

การศึกษา Modified Gravity นอกจากทำได้โดยการปรับปรุงทฤษฎีสัมพัทธภาพในแบบปกติแล้วยังสามารถทำในฟอร์มูเลชันของ ทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลและทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลสมมาตรได้ ตัวอย่างทฤษฎีปรับปรุงของความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลสมมาตรเช่น ทฤษฎี $f(\mathcal{Q})$ (ดูสมการ (14))[J.B. Jimeneza, et al. (2561), J.B. Jimeneza, et al. (2562)] ทฤษฎีสเกลาร์-นอนเมตริก [L. Järv, et al. (2561), M. Rünkla, et al. (2561)] ทฤษฎีปรับปรุงโดยการแปลงคอนฟอร์มอล(conformal transformation)[V. Gakis ,et al. (2562)] ส่วนการปรับปรุงโดยการแปลงดิสฟอร์มอลยังไม่มีการนำมาศึกษาในทฤษฎีนี้ แต่มีการศึกษาในกรณีของทฤษฎีเทเลพารัลเลลแบบดั้งเดิม[A. Golovnev, et al.(2563)]

ทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลลสมาตร

ฟอร์มูเลชันมาตรฐานของทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ตั้งอยู่บนพื้นฐานที่ว่าของเราขาคณิตของกาลอวกาศ เป็นแบบรีมันน์ซึ่งมีตัวแปรพื้นฐานสองตัวคือ เมตริก (metric, $g_{\mu\nu}$) และ แอฟไฟน์ คอนเนคชัน (affine connection, $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$) หรือคอนเนคชัน รวมถึงกำหนดเงื่อนไขทางเรขาคณิตสองอย่างคือ ความเข้ากันได้ของเมตริก (metric compatible)

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

และ การปราศจากทอร์ชัน (torsion-free)

$$\begin{aligned} T^{\alpha}{}_{\mu\nu} &\equiv \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

จากเงื่อนไขทั้งสองทำให้คอนเนคชันที่ได้มีรูปแบบเดียวกับสัญลักษณ์ของคริสตอฟเฟล (Christoffel symbols, $\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix}$) นั่นคือ

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu} \right) \equiv \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \tag{3}$$

เราเรียกคอนเนกชันนี้ว่า ‘คอนเนคชัน เลวี-ซิวิตา’ (Levi-Civita connection) อย่างไรก็ตามโดยหลักการแล้วเงื่อนไขทั้งสองนี้ไม่จำเป็นสำหรับเราขาคณิตรีมันน์ รูปแบบทั่วไปของ แอฟไฟน์ คอนเนคชัน [J.B. Jimenez, et al. (2562)] คือ ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \neq 0,\, T_{\mu\nu} \neq 0$)

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu} + L^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{4}$$

โดยที่ $K^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์คอนทอร์ชัน (contorsion tensor) และ $L^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ คือเทนเซอร์ดิสฟอร์เมชัน (disformation tensor) โดย

$$K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T^{\alpha}{}_{\mu\nu} + T_{(\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu)} \tag{5}$$

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (-Q_{\mu\beta\nu} - Q_{\nu\beta\mu} + Q_{\beta\mu\nu}) \tag{6}$$

เทนเซอร์ $K^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ และ $L^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ บรรจุเทนเซอร์ทอร์ชัน และตัวแปรนอนเมตริก หรือ เทนเซอร์นอนเมตริก (non-metricity tensor, $Q_{\alpha\mu\nu}$) เอาไว้ ตามลำดับ ซึ่งเทนเซอร์ทั้งสองนิยามโดย

$$T^{\alpha}{}_{\mu\nu} := 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\nu]} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} \tag{7}$$

$$Q_{\alpha\mu\nu} := \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta} \tag{8}$$

ตามลำดับ ถ้าเราสร้างทฤษฎีทางเรขาคณิตของกาลอวกาศ โดยเงื่อนไข $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$ และ $T^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$ เราจะได้ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป ซึ่งอธิบายโดย แอกชันของไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต

$$S_{EH} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{9}$$

โดยที่ $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$ และ

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} \tag{10}$$

ถ้าเรากำหนดเงื่อนไข $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$ และ $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0$ เราจะได้ทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบเทเลพารัลเลล

$$S_T = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{c_1}{4}T_{\alpha\mu\nu}T^{\alpha\mu\nu} + \frac{c_2}{2}T_{\alpha\mu\nu}T^{\mu\alpha\nu} - c_3 T_\alpha T^\alpha\right) \tag{11}$$

ในกรณีที่ $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ ทฤษฎีที่ได้จะให้ผลที่สมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป เรียกว่า ทฤษฎีเทเลพารัลเลลซึ่งสมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (Teleparallel equivalent of general relativity, TEGR)

ในกรณีที่เรากำหนดเงื่อนไขกึ่งกลางระหว่างเงื่อนไขทางเรขาคณิตของทฤษฎีทั้งสองที่กล่าวมา นั้นคือให้ $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0$ (เงื่อนไขเทเลพารัลเลล) และ $T^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$ (เงื่อนไขสมมาตร) เราจะได้ทฤษฎีที่อธิบายความโน้มถ่วงด้วยแอกชัน

$$S_Q = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\mathbb{Q} \tag{12}$$

โดย

$$\mathbb{Q} = \frac{c_1}{4}Q_{\alpha\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{c_2}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\beta\alpha\gamma} - \frac{c_3}{4}Q_\alpha Q^\alpha + (c_4 - 1)\tilde{Q}_\alpha\tilde{Q}^\alpha + \frac{c_5}{2}\tilde{Q}_\alpha Q^\alpha \tag{13}$$

โดยที่ $Q_\alpha := Q_\alpha{}^\lambda{}_\lambda,\ \tilde{Q}_\alpha := Q_\lambda{}^\lambda{}_\lambda$ เราเรียกทฤษฎีที่อธิบายโดยแอกชันนี้ว่าทฤษฎีความโน้มถ่วงเทเลพารัลเลลสมมาตร (Symmetric Teleparallel Gravity, STG) ในกรณีที่ $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 1$ เราจะได้ทฤษฎีที่ให้พลวัตของความโน้มถ่วงที่สมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพ เรียกว่า ทฤษฎีสมมาตรเทเลพารัลเลลซึ่งสมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป มีแอกชันดังนี้

$$S_{STEGR} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{Q} \tag{14}$$

โดย $\mathcal{Q} = \frac{1}{4}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma}Q^{\beta\alpha\gamma} - \frac{1}{4}Q_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{2}\tilde{Q}_\alpha Q^\alpha$

การแปลงดิสฟอร์มอลและคอนแทรคชันของเทนเซอร์นอนเมตริก

การแปลงเมตริกแบบดิสฟอร์มอลคือการแปลงสนามเมตริกโดยความสัมพันธ์

$$\bar{g}_{\mu\nu} = Ag_{\mu\nu} + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{15}$$

โดยที่ $\phi(x),\ A(x)$ และ $B(x)$ เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ ในการคำนวณเราจำเป็นต้องใช้ คอนทราวาเรียนท์เมติกเทนเซอร์ และ ดีเทอร์มีแนนท์ ของเมตริกซึ่งภายใต้การแปลงดิสฟอร์มอลเขียนได้เป็น

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{A}\left[g^{\mu\nu} - \frac{B}{A-2BX}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi\right] \quad (16)$$

$$\bar{g} = A^4 g(1 - 2\frac{B}{A}X) \quad (17)$$

ตามลำดับ โดยที่ $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \equiv -\frac{1}{2}\phi^\mu\phi_\mu$

การคำนวณการแปลงดิสฟอร์มอลของตัวแปรนอนเมตริก สามารถทำได้ในเงื่อนไข โคอินซิเดนท์เกจ (coincident gauge) [J.B. Jimeneza, et al. (2561)] กำหนดโดยความสัมพันธ์

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + L^\alpha{}_{\mu\nu} \stackrel{*}{=} 0 \quad (18)$$

นั่นคือแอฟไฟน์คอนเนคชันเท่ากับศูนย์ทั่วทั้งกาลอวกาศ การคำนวณการแปลงของ เทนเซอร์นอนเมตริก ภายใต้แฟกเตอร์คอนฟอร์มอล $A(x)$ ถูกคำนวณไว้ใน [V. Gakis ,et al. (2562)] ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\check{Q}_{\alpha\mu\nu} = A(Q_{\alpha\mu\nu} + g_{\mu\nu}\partial_\alpha \ln A) \quad (19)$$

$$\check{Q}^{\alpha\mu\nu} = A^{-2}(Q^{\alpha\mu\nu} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\beta \ln A) \quad (20)$$

$$\check{Q}_\mu = Q_\mu + 4\partial_\mu \ln A,\ \check{\tilde{Q}}_\mu = \tilde{Q}_\mu + \partial_\mu \ln A \quad (21)$$

จากผลการแปลงนี้ทำให้พจน์ใน S_{STEGR} ถูกแปลงไปดังนี้

$$\begin{aligned}
\check{Q}_{\alpha\mu\nu}\check{Q}^{\alpha\mu\nu} &= A^{-1}\Big[Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\alpha\mu\nu} + 2Q^\alpha(\partial_\alpha \ln A) + 4g^{\alpha\alpha'}(\partial_\alpha \ln A)(\partial_{\alpha'} \ln A)\Big], \\
\check{Q}_{\alpha\mu\nu}\check{Q}^{\mu\alpha\nu} &= A^{-1}\Big[Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\mu\alpha\nu} + 2\bar{Q}^\alpha(\partial_\alpha \ln A) + g^{\alpha\alpha'}(\partial_\alpha \ln A)(\partial_{\alpha'} \ln A)\Big], \\
\check{Q}_\alpha\check{Q}^\alpha &= A^{-1}\Big[Q_\alpha Q^\alpha + 8Q^\alpha(\partial_\alpha \ln A) + 16g^{\alpha\alpha'}(\partial_\alpha \ln A)(\partial_{\alpha'} \ln A)\Big], \\
\check{\bar{Q}}_\alpha\check{Q}^\alpha &= A^{-1}\Big[\bar{Q}_\alpha Q^\alpha + 4\bar{Q}^\alpha(\partial_\alpha \ln A) + Q^\alpha(\partial_\alpha \ln A) + 4g^{\alpha\alpha'}(\partial_\alpha \ln A)(\partial_{\alpha'} \ln A)\Big].
\end{aligned} \quad (22)$$

โดย ˇ บ่งบอกว่าเมตริกถูกแปลงโดยแฟกเตอร์คอนฟอร์มอล $\check{g}_{\mu\nu} = A(x)g_{\mu\nu}$

ในงานนี้เราจะศึกษาในกรณีที่กว้างขึ้นโดยใช้การแปลงเมตริกแบบดิสฟอร์มอลตามสมการ (15) ภายใต้การแปลงนี้ เทนเซอร์นอนเมตริก ในโคอินซิเดนท์เกจ จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$\bar{Q}_{\alpha\mu\nu} = \check{Q}_{\alpha\mu\nu} + B\left(\phi_\mu\phi_\nu\partial_\alpha \ln B + \phi_{\mu\alpha}\phi_\nu + \phi_\mu\phi_{\nu\alpha}\right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}^{\alpha\mu\nu} = \check{Q}^{\alpha\mu\nu} &- \frac{F}{A}\phi^\alpha\phi^\beta\left[Q_\beta{}^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\partial_\beta \ln A\right] \\
&+ Fg^{\alpha\beta}\left[\phi^\mu\phi^\nu\partial_\beta \ln F + (2\phi_\beta^{(\mu}\phi^{\nu)} - 2Q_\beta{}^{\lambda(\mu}\phi^{\nu)}\phi_\lambda)\right] \\
&- AF^2\phi^\alpha\phi^\beta\left[\phi^\mu\phi^\nu\partial_\beta \ln F + (2\phi_\beta^{(\mu}\phi^{\nu)} - 2Q_\beta{}^{\lambda(\mu}\phi^{\nu)}\phi_\lambda)\right]
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{Q}_\alpha \equiv \bar{Q}_{\alpha\mu\nu}\bar{g}^{\mu\nu} = \check{Q}_\alpha - AF\left(\phi^\mu\phi^\nu Q_{\alpha\mu\nu} - 2X\partial_\alpha \ln A\right) - \left(\frac{B}{A} + 2BF\right)\left(2X\partial_\alpha \ln B + 2\partial_\alpha X - Q_{\alpha\gamma\delta}\phi^\gamma\phi^\delta\right) \quad (25)$$

$$\bar{\tilde{Q}}_\nu \equiv \bar{Q}_{\alpha\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\mu} = \check{\tilde{Q}}_\nu + \frac{B}{A}\left(\phi_\nu\phi^\alpha\partial_\alpha \ln B + (\Box\phi)\phi_\nu - \partial_\nu X + \frac{1}{2}Q_{\nu\alpha\beta}\phi^\alpha\phi^\beta\right) - F\left(\phi^\alpha\phi^\mu Q_{\alpha\mu\nu} + \phi_\nu\phi^\alpha\partial_\alpha \ln A\right) + BF\left(2X\phi_\nu\phi^\alpha\partial_\alpha \ln B + \phi_\nu\phi^\alpha\partial_\alpha X - \frac{1}{2}\phi_\nu\phi^\alpha Q_{\alpha\gamma\delta}\phi^\gamma\phi^\delta - 2X\partial_\nu X + XQ_{\nu\alpha\beta}\phi^\alpha\phi^\beta\right) \quad (26)$$

โดยที่ $F \equiv \frac{1}{A}\frac{B}{A^2 - 2BX}$ และ $\phi^\beta_\mu \equiv g^{\beta\lambda}\partial_\lambda\partial_\mu\phi$ ในการคำนวณด้านบนนี้ใช้ข้อสังเกตหลายข้อ ดังนี้

- $\partial_\beta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\gamma}\partial_\beta g_{\alpha\gamma} \equiv -Q^{\mu\nu}_\beta$
- $\phi_{\alpha\mu}\phi^\alpha = \frac{1}{2}Q_\mu{}^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta - \partial_\mu X$
- $\partial_\beta\phi^\mu = -Q_\beta{}^{\mu\lambda}\phi_\lambda + \phi^\mu_\beta$

จากผลแปลงนี้ทำให้พจน์แรกใน S_{STEGR} เปลี่ยนไปไปดังนี้ (คำนวณโดยการนำสมการที่ (23) และ(24) มาคอนแทรคชันกันแบบพจ์ต่อพจน์)

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{\alpha\mu\nu}\bar{Q}^{\alpha\mu\nu} &= \check{Q}_{\alpha\mu\nu}\check{Q}^{\alpha\mu\nu} - F(\phi\cdot Q)^{\mu\nu}(\phi\cdot Q)_{\mu\nu} - F(\phi\cdot Q)(\phi\cdot\partial\ln A)\\
&+ AF(\partial\ln F)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) + 2AF\phi^\mu_\beta(Q\cdot\phi)^\beta{}_\mu - 2AF(Q\cdot\phi)^{\alpha\mu}(Q\cdot\phi)_{\alpha\mu}\\
&- A^2F^2(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi)(\phi\cdot\partial\ln F) - A^2F^2(\phi\cdot Q\cdot\phi)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi)\\
&+ 2A^2F^2(\phi\cdot Q\cdot\phi)\cdot\partial X + 4A^2F^2(\phi\cdot Q\cdot\phi)\cdot(\phi\cdot Q\cdot\phi)\\
&- F(\phi\cdot Q)(\phi\cdot\partial\ln A) - 4F(\phi\cdot\partial\ln A)(\phi\cdot\partial\ln B) - 2AFX(\partial\ln F)\cdot(\partial\ln A)\\
&+ AF(\partial\ln A)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) - 2AF(\partial X)\cdot(\partial\ln A) - 2AF(\partial\ln A)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi)\\
&+ 2A^2F^2X(\phi\cdot\partial\ln A)(\phi\cdot\partial\ln F) - A^2F^2(\phi\cdot\partial\ln A)(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi)\\
&+ 2A^2F^2(\phi\cdot\partial\ln A)(\phi\cdot\partial X) + 2A^2F^2(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi)(\phi\cdot\partial\ln A)\\
&+ \frac{B}{A^2}(\partial\ln B)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) - \frac{2BX}{A^2}(\partial\ln B)^2 - \frac{BF}{A}(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi)(\phi\cdot\partial\ln B)\\
&+ \frac{2BFX}{A}(\phi\cdot\partial\ln A)(\phi\cdot\partial\ln B) - 2BFX^2(\partial\ln B)\cdot(\partial\ln F)\\
&- 2BFX(\partial\ln B)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) + 4BFX(\partial\ln B)\cdot(\partial X)\\
&+ 4BFX(\partial\ln B)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) - 4ABF^2X^2(\phi\cdot\ln B)(\phi\cdot\partial\ln F)\\
&+ 2ABF^2X(\phi\cdot\partial\ln B)(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi) - 4ABF^2X(\phi\cdot\partial\ln B)(\phi\cdot\partial X)\\
&- 4ABF^2X(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi)(\phi\cdot\partial\ln B)\\
&+ \frac{B}{A^2}(Q\cdot\phi)^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + \frac{B}{2A^2}(\partial\ln A)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) - \frac{B}{A^2}(\partial X)\cdot(\partial\ln A)\\
&- \frac{BF}{A}(\phi\cdot Q\cdot\phi)(Q\cdot\phi\cdot\phi) + \frac{2BF}{A}(\phi\cdot Q\cdot\phi)\cdot\partial X\\
&- 2BFX(\partial\ln F)\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi) + 4BFX(\partial\ln F)\cdot(\partial X)\\
&- 8BFX\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 8BFX(Q\cdot\phi)^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 2ABF^2X(\phi\cdot\partial\ln F)(\phi\cdot Q\cdot\phi\cdot\phi)\\
&- 4ABF^2X(\phi\cdot\partial\ln F)(\phi\cdot\partial X) + 2ABF^2X(Q\cdot\phi\cdot\phi)^2 - 8ABF^2X\partial X\cdot(Q\cdot\phi\cdot\phi)\\
&+ 8ABF^2X(\partial X)^2 - 4ABF^2X(Q\cdot\phi\cdot\phi)\cdot(\phi\cdot Q\cdot\phi)\\
&+ 8ABF^2X(\partial X)\cdot(\phi\cdot Q\cdot\phi)
\end{aligned} \quad (27)$$

โดยสัญลักษณที่เราใช้คือ $A\cdot B = g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu, A^2 = A\cdot A$ ตัวอย่างเช่น $(\phi\cdot Q)^{\mu\nu} = \phi^\alpha Q_{\alpha\mu\nu}$ ผลลัพธ์ด้านบนคือ พจน์แรกจากสี่พจ์ในในแอกชันของ ทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบพารัลเลลสมมาตรซึ่งสมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป จะเห็นได้ว่ามีความซับซ้อน มากขึ้นกว่าผลของการแปลงแบบคอนฟอร์มอลเป็นอย่างมาก

สรุปและอภิปรายผล

เราได้ศึกษาทฤษฎีเทเลพารัลเลลสมมาตรซึ่งสมมูลกับทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (STEGR) ซึ่งใช้เทนเซอร์นอนเมตริกในการอธิบายแรงโน้มถ่วงแทนที่ความโค้งของกาลอวกาศ การคำนวณใน STEGR นั้นมีเทคนิคที่ต่างไปจากเทคนิคที่เป็นที่คุ้นเคยในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปหลายประการดังที่ได้ให้ข้อสังเกตไว้

ในงานนี้เราพบว่าพจน์แรกของแอกชันของทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบพารัลเลลสมมาตรซึ่งถูกแปลงไปด้วยการแปลงสนามของเมตริกเทนเซอร์ด้วยการแปลงดิสฟอร์มอล ($\bar{Q}_{\alpha\mu\nu}\bar{Q}^{\alpha\mu\nu}$) มีความซับซ้อนและมีจำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นมากจากการแปลงแบบคอนฟอร์มอล($\check{Q}_{\alpha\mu\nu}\check{Q}^{\alpha\mu\nu}$)เป็นจำนวนมาก สิ่งที่ต้องศึกษาต่อไปในอนาคตคือการแปลงดิสฟอร์มอลของทฤษฎีแรงโน้มถ่วงแบบพารัลเลลสมมาตรแบบเต็มรูปแบบ

$$S_{STEGR} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left(\frac{1}{4}\bar{Q}_{\alpha\beta\gamma}\bar{Q}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\bar{Q}_{\alpha\beta\gamma}\bar{Q}^{\beta\alpha\gamma} - \frac{1}{4}\bar{Q}_{\alpha}\bar{Q}^{\alpha} + \frac{1}{2}\tilde{Q}_{\alpha}\bar{Q}^{\alpha}\right) \quad (28)$$

โดยเราคาดหวังว่าจะได้แอกชันในรูปแบบที่กระชับขึ้นเหมือนกรณีของการแปลงดิสฟอร์มอลในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป [S. Jaksri, et al. (2560)] รวมถึงการหาสมการการเคลื่อนที่ (equations of motion) ที่ได้จากแอกชันนี้เพื่อศึกษาแบบจำลองทางจักรวาลวิทยา หรือ ศึกษาอันตรกิริยาระหว่างตัวแปรทางเรขาคณิตของกาลอวกาศกับสนามสเกลาร์ รวมถึงอันตรกิริยาแบบ self-interaction ของสนามสเกลาร์ ที่ได้จากทฤษฎีนี้ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

CW. Misner, et al. (2516). **Gravitation**. WH Freeman, San Francisco.

C.M Will. (2557). **The Confrontation between General Relativity and Experiment**. Living Rev.Rel. 17 (2014) 4.

T. Clifton, et al. (2555) **Modified Gravity and Cosmology.** Phys.Rept. 513 (2012) 1-189 arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO] .

R. Aldrovandi. (2556). **Teleparallel Gravity : An Introduction**. Fundam.Theor.Phys. 173 (2013).

J.M. Nester, H-J Yo. (2542). **Symmetric teleparallel general relativity**. Chin.J.Phys. 37 (1999) 113 gr-qc/9809049.

I. Mol. (2560). **The Non-Metricity Formulation of General Relativity**. Adv.Appl.Clifford Algebras 27 (2017) no.3, 2607-2638 arXiv:1406.0737 [physics.gen-ph].

M. Adak. (2549). **The Symmetric teleparallel gravity**. Turk.J.Phys. 30 (2006) 379-390 gr-qc/0611077

L. Järv, et al. (2561). **Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension**. Phys.Rev. D97 (2018) no.12, 124025 arXiv:1802.00492 [gr-qc] .

M. Rünkla, et al. (2561). **Family of scalar-nonmetricity theories of gravity**. Phys.Rev. D98 (2018) no.8, 084034 arXiv:1805.12197 [gr-qc] .

V. Gakis. (2562), et al. **Conformal Gravity and Transformations in the Symmetric Teleparallel Framework**. arXiv:1908.05741 [gr-qc] .

A. Golovnev, et al. (2563). **Disformal transformations in modified teleparallel gravity**. Symmetry 12 (2020) no.1, 152 arXiv:1912.04604 [gr-qc] .

J.B. Jimeneza, et al. (2562). **The Geometrical Trinity of Gravity**. Universe 5 (2019) no.7, 173.

J.B. Jimeneza, et al. (2561). **Coincident general relativity**. Phys. Rev. D 98, 044048 (2018).

S. Jaksri, et al. (2560). **The background evolution in general disformal gravity.** J. Phys.: Conf. Ser.901 012011.